

## 中心简介

湖北金融发展与金融安全研究中心的前身是1985年成立的武汉金融高等专科学校金融研究所。湖北经济学院成立后，更名为湖北经济学院金融改革与发展研究所，2003年10月改为现名。研究中心由湖北经济学院建设，以湖北经济学院金融学院为依托，开放式运作，集中研究湖北金融发展与金融安全领域的重大理论与现实问题，为湖北金融发展和经济建设服务。研究中心包括农村金融、互联网金融、区域金融、金融监管与金融安全四个研究所。

研究中心始终坚持理论研究与应用研究相结合，跟踪国内外学科发展前沿与形成自身特色相结合的科学研究理念，紧紧围绕开放经济条件下的金融发展与金融安全主题开展科学研究工作，一批研究成果达到了国内领先水平。目前已出版了《资本流入与发展中国家金融安全》、《发展中国家银行危机研究》、《21世纪区域金融安全问题研究》等学术专著20余部，承担了国家社科基金课题、国家自然科学基金课题、教育部人文社科基金课题和湖北省政府重大招标课题30多项。在《经济研究》、《金融经济》、《保险研究》、《投资研究》等国内著名学术期刊上发表了一批高质量的学术论文，其中，30多篇论文分别被新华文摘、中国人民大学报刊复印资料、高等学校文科学报文摘等权威刊物转载。获得省部级以上科研成果奖励20多项。

研究中心每年公开向社会招标省级重大、重点科学研究项目，并结集出版《湖北金融发展与金融安全研究中心重点课题研究报告》，组织研究人员编纂《湖北金融发展报告》、《中国金融前沿问题》；邀请金融界、学术界的专家学者举办一年一度的地方金融发展论坛，经常性地举办专题学术报告；出版了不定期的学术期刊《经济金融论坛》。

湖北金融发展与金融安全研究中心发展的总体目标是：建设成为全省乃至在全国有影响的金融学术研究中心、产学研培训中心、地方金融决策服务中心和信息咨询中心，在全国金融学科具有明显的科研优势和学术影响，并为湖北省的金融发展和经济建设提供学术上的支持。

2020年第五期/总第66期

主办单位：湖北经济学院湖北金融发展与金融安全研究中心

# 经济金融论坛

Economics and Finance Forum



Economics and Finance Forum

## ● 不确定性、投资者犹豫程度与永久美式期权定价

内部交流 仅供参考 未经许可 不得转载

地址：武汉市江夏区藏龙岛开发区杨桥湖大道8号 邮编：430205  
湖北经济学院明辨楼

电话：(027)81973783

网址：<http://jryjzx.hbue.edu.cn>

传真：(027)81973783

E-mail：[jrzx@hbue.edu.cn](mailto:jrzx@hbue.edu.cn)

湖北省普通高等学校人文社会科学重点研究基地



# 不确定性、投资者犹豫程度与永久美式期权定价

杨申燕<sup>1</sup>, 明雷<sup>2</sup>, 唐慧<sup>2</sup>, 杨胜刚<sup>2</sup>

(1. 湖北经济学院 金融学院 湖北金融发展与金融安全研究中心, 武汉 430205; 2. 湖南大学 金融与统计学院, 长沙 410079)

**摘要** 近年来金融市场黑天鹅事件频发, 加剧了投资者行为的状态依赖性和不确定性. 本文利用三角直觉模糊数来衡量投资决策行为的不确定性和犹豫程度, 建立了模糊随机过程下支付连续红利的永久美式期权定价模型, 得到了风险中性概率测度下的美式期权区间价格. 然后, 基于本文理论模型模拟了标的资产的模糊价格, 并进行了模型的比较静态分析. 研究发现: 基于三角直觉模糊数的永久美式期权区间价格较好地衡量了投资者犹豫程度, 对投资决策具有现实指导意义.

**关键词** 永久美式期权; 三角直觉模糊数; 不确定性; 犹豫程度; 风险中性定价

## Uncertainty, hesitancy degree of investors and pricing perpetual American options

YANG Shenyan<sup>1</sup>, MING Lei<sup>2</sup>, TANG Hui<sup>2</sup>, YANG Shenggang<sup>2</sup>

(1. Hubei Financial Development and Financial Security Research Center, School of Finance, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China; 2. School of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha 410079, China)

**Abstract** In recent years financial markets attacked frequently by black swans events, which aggravated investor behaviors' state dependence and uncertainty. Using triangular intuitionistic fuzzy numbers to measure the uncertainty and hesitancy degree of investors' decision-making behavior, this paper initially establishes the interval pricing model of perpetual American options with continuous dividends under fuzzy stochastic process. The option price range under risk-neutral probability measure is obtained. In addition, we simulate the underlying asset fuzzy price based on the theoretical model and carry out the comparative static analysis of the model. The results show that the interval price of perpetual American option based on triangular intuitionistic fuzzy number can better measure the option fuzzy price with investors' hesitancy, which has more realistic guiding significance for investment decision.

**Keywords** perpetual American option; triangular intuitionistic fuzzy numbers; uncertainty; hesitancy degree; risk-neutral pricing

## 1 引言

美式期权相较于欧式期权, 因行权时间和退出方式具有较高的自由度而广受投资者欢迎, 占据了市场交易的主流. 据期货日报 2017 年统计, 以芝加哥商业交易所 (CME) 和芝加哥期权交易所 (CBOE) 等市场为例, 完全采用美式行权方式的商品期权和金融期权分别占 65.79% 和 53.42%, 均高于欧式期权. 特别是农产

**收稿日期:** 2020-04-17

**作者简介:** 杨申燕 (1972-), 女, 湖北天门人, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 金融创新与定价决策; 通信作者: 明雷 (1987-), 男, 湖北十堰人, 助理教授、硕士生导师, 研究方向: 数量金融和资产定价, E-mail: minglei@hnu.edu.cn; 唐慧 (1996-), 女, 湖南益阳人, 硕士研究生, 研究方向: 数量金融和资产定价; 杨胜刚 (1965-), 男, 湖南常德人, 教授、博士生导师, 研究方向: 数量金融与国际金融.

**基金项目:** 国家自然科学基金青年项目 (71903051); 国家自然科学基金重大项目 (71790593); 国家自然科学基金应急管理项目 (71850006); 国家社会科学基金一般项目 (19BGL055)

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (71903051, 71790593, 71850006); National Social Science Foundation of China (19BGL055)

**中文引用格式:** 杨申燕, 明雷, 唐慧, 等. 不确定性、投资者犹豫程度与永久美式期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(11): 2839-2847.

**英文引用格式:** Yang S Y, Ming L, Tang H, et al. Uncertainty, hesitancy degree of investors and pricing perpetual American options[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2020, 40(11): 2839-2847.

品期权, 100% 选择美式行权方式.

美式期权的盛行受到了业界和学界的广泛关注, 如何对其进行合理、精确的定价事关金融衍生品市场的效率, 一直是学界研究的焦点. 自 1973 年 Merton<sup>[1]</sup> 提出理性期权定价理论以来, 国内外学者围绕其研究进行了改进, 产生了大量研究成果. 如王西梅等<sup>[2]</sup> 探讨了基于局部波动率模型的上证 50ETF 期权定价问题. 由于美式期权行权时间的不确定性, 一般得不到美式期权价格的解析式, 现有文献主要集中研究其数值解<sup>[3-5]</sup>, 近似解析解<sup>[6]</sup> 等. 部分学者利用快速均值回归下的波动率方法研究了美式期权定价的问题<sup>[7-9]</sup>, 还有一些学者研究了跳扩散模型下的美式期权价格<sup>[10-12]</sup>. 鉴于美式期权定价的复杂性, 部分学者将研究聚焦到一类特殊的美式期权上, 即永久美式期权. 一些学者通过重新定义标的资产价格的分布来研究永久美式期权定价<sup>[13-17]</sup>. 另外一类学者重新研究了最优停时问题, 分别给出了永久美式看跌期权和永久美式看涨期权的价格<sup>[18,19]</sup>.

尽管有大量学者一直致力于改进模型和计量方法, 但对于期权价格的计算结果总是不尽如人意, 归根结底在于传统的资产定价方法假定资产价格的分布是已知的, 但现实中因为投资者决策的主观不确定性其分布却未知. 如果随机变量的概率分布未知, 则模糊问题随之产生<sup>[20]</sup>. 仅依靠传统的概率统计模型显然不足, 理论模型的随机性和模糊性不能相互替代, 二者存在本质的差异<sup>[21]</sup>. 针对这一问题, 近年来, 一些学者开始关注模糊数学在期权定价领域的应用<sup>[22]</sup>. 韩立岩和泮敏<sup>[23]</sup> 以折现相对熵度量 Knight 不确定性大小来研究期权定价问题. 张茂军, 秦学智和南江霞<sup>[24]</sup> 基于三角直觉模糊数建立了欧式期权二叉树模型. Yoshida<sup>[25]</sup> 用二叉树的方法对美式看跌期权给出了离散模糊定价模型, 在其另一篇文章中引进新的模糊数均值评价方法, 并应用到在不确定条件下美式看跌期权的定价中<sup>[26]</sup>. Zhang 和 Watada<sup>[27]</sup> 将波动率作为抛物型模糊数, 构造了一个基于无限纯跳跃过程的 Levy-GJR-GARCH 模型, 并利用最小二乘蒙特卡罗模拟和模糊二叉树法将该模型与模糊仿真技术相结合进行数值模拟, 得到了模糊环境下美式期权价格. 龚日朝和马霖源<sup>[28]</sup> 从得分函数与精确函数的角度研究区间直觉模糊数及其应用. 模糊数的应用逐渐得到大家的关注.

综上, 由于美式期权行权时间和退出方式自由度较高, 现有美式期权定价的研究多基于随机变量概率分布已知的假定, 将模糊数学引入期权定价的研究大多探讨的是欧式期权定价. 虽然部分学者也提出了美式期权离散模糊定价模型, 但未充分考虑美式期权选择自由度所导致的投资者行为的状态依赖性和不确定性<sup>[29]</sup>, 加之近年来金融市场黑天鹅事件层出不穷, 更加剧了期权市场投资者行为的不确定性, 投资者决策的犹豫程度明显上升, 这成为美式期权定价中不可忽视的影响因素. 王贞洁和王京<sup>[30]</sup> 的研究就发现宏观经济的不确定性会显著影响投资者行为, 进而加大资产价格变动的不确定性. 因此, 从更接近于现实的假设出发, 研究美式期权的区间模糊定价更有意义.

本文的主要贡献在于: 第一, 考虑投资者决策行为的不确定性, 将投资者犹豫程度引入美式期权定价模型, 提升了美式期权定价的合理性和精确性, 对投资决策具有现实指导意义. 第二, 在 Yoshida<sup>[25,26]</sup> 的基础上研究连续时间模型下支付连续红利的永久美式期权的定价, 得到了永久美式期权的区间价格, 丰富了现有永久美式期权定价理论. 第三, 本文在三角直觉模糊数下进行了比较静态分析, 讨论了不同因素对美式期权价格的影响.

本文余下结构安排是: 第二部分给出支付连续红利的永久美式期权定价模型和三角直觉模糊数的定义, 第三部分探讨三角直觉模糊下的美式期权定价问题, 第四部分进行标的资产的价格模拟, 第五部分是比较静态分析, 最后一部分为结论.

## 2 预备知识

### 2.1 支付连续红利的永久美式期权定价模型

设  $(\Omega, F, P)$  是一个完备的概率空间,  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  是定义在该概率空间上的标准布朗运动, 假设金融市场上有股票和无风险债券两种可自由连续交易的资产. 在  $t$  时刻, 无风险债券价格为  $X_t$ , 且  $X_t$  满足常微分方程

$$dX_t = rX_t dt. \quad (1)$$

支付连续红利的股票价格  $S_t$  满足如下随机微分方程:

$$dS_t = S_t(\mu - q)dt + \sigma S_t dB_t, \quad (2)$$

其中  $r$  为无风险利率, 股票的期望回报率为  $\mu$ , 作为原生资产的股票需要连续支付股息 (红利), 其红利率为  $q$ ,  $\sigma$  为布朗运动的波动率.

根据 Girsanov 定理, 在等价鞅测度  $Q$  下,  $t$  时刻的股价为

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}. \quad (3)$$

根据该定理, 测度  $Q$  即为风险中性测度的定义, 和实际概率测度  $P$  等价, 而新定义的布朗运动  $W(t) = B(t) + \frac{\mu-r}{\sigma}t$  就是在风险中性测度定义下的布朗运动. 通过上述定理我们发现, 风险中性测度相对于实际概率测度, 改变的仅仅是测度的期望, 而测度的二阶矩波动率并没有改变.

以股票价格  $S_t$  作为标的、执行价格为  $K$  的支付连续红利的永久美式看跌期权在  $t$  时刻的损益为  $\varphi_t = \max\{K - S_t, 0\}$ .

利用风险中性定价的方法, 易得支付连续红利的永久美式看跌期权的价格为

$$V_p(t, S_t) = \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1 + \gamma_1} S_t^{-\gamma_1}, \quad (4)$$

其最优实施边界  $L_p = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} K$ , 其中  $\gamma_1 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

引理 1<sup>[31]</sup> 美式看涨—看跌期权的对称关系

$$\begin{cases} V_c(S; r, q) = \frac{S}{K} V_p\left(\frac{K^2}{S}; q, r\right), \\ \sqrt{L_c(r, q) \cdot L_q(q, r)} = K, \end{cases}$$

其中  $V_c(S; r, q)$ ,  $V_p(S; r, q)$  分别为支付连续红利的永久美式看涨和看跌期权的价格,  $L_c(r, q)$ ,  $L_q(r, q)$  分别为支付连续红利的永久美式看涨和看跌期权的最佳实施边界.

利用引理 1, 可得支付连续红利的永久美式看涨期权的价格为

$$V_c(t, S_t) = \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1 - \gamma_2} S_t^{\gamma_2}, \quad (5)$$

其最佳实施边界为  $L_c = \frac{\gamma_2 K}{\gamma_2 - 1}$ , 其中  $\gamma_2 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

## 2.2 三角直觉模糊数

定义 1<sup>[22]</sup> 设  $\langle (a_1, a, a_2); \omega_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$  是实数集  $R$  上的一个直觉模糊集, 其隶属度  $\theta_{\tilde{a}}$  与非隶属度  $\eta_{\tilde{a}}$  分别定义为:

$$\theta_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a - a_1} \omega_{\tilde{a}}, & a_1 \leq x < a, \\ \omega_{\tilde{a}}, & x = a, \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a} \omega_{\tilde{a}}, & a < x \leq a_2, \\ 0, & x < a_1, x > a_2, \end{cases} \quad (6)$$

$$\eta_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{a - x + u_{\tilde{a}}(x - a_1)}{a - a_1} \omega_{\tilde{a}}, & a_1 \leq x < a, \\ u_{\tilde{a}}, & x = a, \\ \frac{x - a + u_{\tilde{a}}(a_2 - x)}{a_2 - a} \omega_{\tilde{a}}, & a < x \leq a_2, \\ 1, & x < a_1, x > a_2, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\omega_{\tilde{a}}$  和  $u_{\tilde{a}}$  分别表示最大隶属度和最小非隶属度, 且有  $0 \leq \omega_{\tilde{a}} \leq 1$ ,  $0 \leq u_{\tilde{a}} \leq 1$ ,  $0 \leq \omega_{\tilde{a}} + u_{\tilde{a}} \leq 1$ , 则称  $\langle (a_1, a, a_2); \omega_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$  为三角直觉模糊数. 不确定量  $\tilde{a}$  介于  $a_1$  与  $a_2$  之间, 不确定量最可能的取值是  $a$ , 它的隶属度和非隶属度分别是  $\theta_{\tilde{a}}$  和  $\eta_{\tilde{a}}$ , 最悲观的取值是  $a_1$ , 最乐观的取值是  $a_2$ , 它们的隶属度和非隶属度均分别为 0 和 1.

令  $\pi_{\tilde{a}}(x) \triangleq 1 - \theta_{\tilde{a}}(x) - \eta_{\tilde{a}}(x)$ , 则  $\pi_{\tilde{a}}(x)$  为三角直觉模糊数  $\tilde{a}$  的直觉模糊指标, 它反映了  $x$  属于  $\tilde{a}$  的犹豫程度. 由定义可知, 三角直觉模糊指标是由  $\theta_{\tilde{a}}$  和  $\eta_{\tilde{a}}$  共同决定的. 根据定义 1, 易得  $\pi_{\tilde{a}}(x) \triangleq 1 - \omega_{\tilde{a}}(x) - u_{\tilde{a}}(x)$ . 由于  $\omega_{\tilde{a}}$  和  $u_{\tilde{a}}$  分别是  $\omega_{\tilde{a}}$  和  $u_{\tilde{a}}$  的函数, 所以三角直觉模糊指标最终由  $\omega_{\tilde{a}}$  和  $u_{\tilde{a}}$  共同决定.

引理 2<sup>[22]</sup> 当  $\omega_{\tilde{a}} = 1$  且  $u_{\tilde{a}} = 0$ , 即  $\pi_{\tilde{a}}(x) = 0$  时, 三角直觉模糊数就转化为三角模糊数. 因此三角直觉模糊数是三角模糊数的一般形式, 三角模糊数是三角直觉模糊数的一个特例.

### 3 支付连续红利的永久美式期权的三角直觉模糊价格

令  $\tilde{S}_t$  表示股票的三角直觉模糊价格, 其含义如 (6) 和 (7) 定义所示.

**定义 2**  $\tilde{S}_t$  的截集定义为:  ${}^\alpha \tilde{S}_t^\beta \triangleq \{x \mid \theta_{\tilde{S}}(x) \geq \alpha, \eta_{\tilde{S}}(x) \leq \beta\}$ , 其中  $\tilde{S}_t$  的  $\alpha$  截集定义为  ${}^\alpha \tilde{S}_t \triangleq \{x \mid \theta_{\tilde{S}}(x) \geq \alpha\}$ ,  $\tilde{S}_t$  的  $\beta$  截集定义为  $\tilde{S}_t^\beta \triangleq \{x \mid \eta_{\tilde{S}}(x) \leq \beta\}$ , 且  $0 \leq \alpha \leq \omega_{\tilde{S}}, u_{\tilde{S}} \leq \beta \leq 1$ . 从而得到

$${}^\alpha \tilde{S}_t \triangleq [{}^\alpha I_1(S), {}^\alpha I_2(S)] = [S_1 + \alpha(S - S_1)/\omega_{\tilde{S}}, S_2 - \alpha(S_2 - S)/\omega_{\tilde{S}}], \quad (8)$$

$$\tilde{S}_t^\beta \triangleq [I_1^\beta(S), I_2^\beta(S)] = \left[ \frac{(1 - \beta)S + (\beta - u_{\tilde{S}})S_1}{1 - u_{\tilde{S}}}, \frac{(1 - \beta)S + (\beta - u_{\tilde{S}})S_2}{1 - u_{\tilde{S}}} \right]. \quad (9)$$

根据  $\tilde{S}_t$  的  $(\alpha, \beta)$  截集定义可得

$${}^\alpha \tilde{S}_t^\beta \triangleq \left[ \max({}^\alpha I_1, I_1^\beta), \min({}^\alpha I_2, I_2^\beta) \right].$$

**定理 1** (模糊股票价格  $\tilde{S}_t$  的  $(\alpha, \beta)$  截集) 记  $\Delta = \alpha(1 - u_{\tilde{S}}) - (1 - \beta)\omega_{\tilde{S}}$ , 当  $\Delta > 0$  时  ${}^\alpha \tilde{S}_t^\beta = [{}^\alpha I_1(S), {}^\alpha I_2(S)]$ ; 反之, 当  $\Delta < 0$  时,  ${}^\alpha \tilde{S}_t^\beta = [I_1^\beta(S), I_2^\beta(S)]$ .

**证明** 根据三角模糊数的定义<sup>[22,24]</sup> 和定义 2 易得.

**定义 3** 以模糊股票价格  $\tilde{S}_t$  为标的的支付连续红利的永久美式看跌期权, 假设在停时  $\tau$  时刻执行, 则该期权的模糊价格等于  $\tau$  时刻收益  $\tilde{\varphi}_\tau = \max\{K - \tilde{S}_\tau, 0\}$  的贴现值在等价鞅测度  $Q$  下的数学期望, 即

$$V_{\tilde{P},t} = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \tilde{\varphi}_\tau \right] = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - \tilde{S}_\tau, 0\} \right]. \quad (10)$$

$V_{\tilde{P},t}$  的上下限为

$$V_{\tilde{P},t}^- = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \tilde{\varphi}_\tau^- \right] = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - \tilde{S}_\tau^+, 0\} \right],$$

$$V_{\tilde{P},t}^+ = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \tilde{\varphi}_\tau^+ \right] = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - \tilde{S}_\tau^-, 0\} \right].$$

当  $\Delta > 0$  时, 由定理 1 和式 (8) 可得

$$V_{\tilde{P},t}^- = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - {}^\alpha I_2(S), 0\} \right], \quad (11)$$

$$V_{\tilde{P},t}^+ = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - {}^\alpha I_1(S), 0\} \right]. \quad (12)$$

当  $\Delta \leq 0$  时, 由定理 1 和式 (9) 可得

$$V_{\tilde{P},t}^- = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - \beta I_2(S), 0\} \right], \quad (13)$$

$$V_{\tilde{P},t}^+ = E_\tau^Q \left[ e^{-r(\tau-t)} \max\{K - \beta I_1(S), 0\} \right]. \quad (14)$$

与 Yoshida<sup>[25]</sup> 一样, 令  $S_1 \triangleq S_t - a_t, S_2 \triangleq S_t + a_t, a_t = cS_t$ .

在给出支付连续红利的永久美式看跌期权的三角直觉模糊价格前, 为了讨论方便, 先给出引理 3.

**引理 3** (带漂移布朗运动首次时间的拉普拉斯变换) 设  $B_t$  是概率测度下的布朗运动,  $\nu$  是实数,  $m$  是正数, 定义  $Z_t = \nu t + B_t$  并且令  $\tau_m = \min\{t \geq 0; X(t) = m\}$ ,  $\tau_m$  为停时, 且若  $Z_t$  达不到  $m$  的水平, 则有:  $E^Q e^{-\lambda \tau_m} = e^{-m(-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\lambda})}$ .

**定理 2** (支付连续红利的永久美式看跌期权的三角直觉模糊价格)

当  $\Delta > 0$  时,

$$V_{\tilde{P}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1 + \gamma_1} \left( 1 + \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} c \right)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1}, \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1 + \gamma_1} \left( 1 - \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} c \right)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1} \right]. \quad (15)$$

当  $\Delta \leq 0$  时,

$$V_{\tilde{P}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1 + \gamma_1} \left( 1 - \frac{u_{\tilde{S}} - \beta}{1 - u_{\tilde{S}}} c \right)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1}, \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1 + \gamma_1} \left( 1 + \frac{u_{\tilde{S}} - \beta}{1 - u_{\tilde{S}}} c \right)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1} \right]. \quad (16)$$

其最优实施边界  $L_p = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} K$ , 其中  $\gamma_2 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

**证明** 令  $t = 0$ , 由 (11) 式和 (12) 式可得, 当  $\Delta > 0$ ,

$$V_{\tilde{P}}^- = E^Q \left[ e^{-r\tau} \max\{K - {}^\alpha I_2(S), 0\} \right], \quad (17)$$

$$V_{\tilde{p}}^+ = E^Q [e^{-r\tau} \max \{K - \alpha I_1(S), 0\}]. \quad (18)$$

由引理 3 可知, 当  $\tilde{S}_0 \geq L_p$ ,  $\tilde{S}_t$  首次等于  $L_p$  时

$$\tilde{S}_t = L_p = \tilde{S}_0 e^{(r-q)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_t}.$$

两边取对数有

$$\frac{1}{\sigma} \log \frac{\tilde{S}_0}{L_p} = -\frac{1}{\sigma} \left( r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t - B_t.$$

令引理 3 中的  $\lambda = r$ ,  $\nu = -\frac{1}{\sigma}(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)$ ,  $m = \frac{1}{\sigma} \log(\frac{\tilde{S}_0}{L_p})$ , 则

$$E_{\tau}^Q e^{-r\tau} = e^{-\frac{1}{\sigma} \log \frac{\tilde{S}_0}{L_p} \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma}} = \left( \frac{\tilde{S}_0}{L_p} \right)^{-\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}}, \quad (19)$$

其中,  $\nu = (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)$ . 由式 (17), (18) 和 (19) 可得

$$V_{\tilde{p}}^- = (K - L_p) \left( 1 + \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} \right)^{-\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}} \left( \frac{S_0}{L_p} \right)^{-\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}}, \quad (20)$$

$$V_{\tilde{p}}^+ = (K - L_p) \left( 1 - \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} \right)^{-\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}} \left( \frac{S_0}{L_p} \right)^{-\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}}, \quad (21)$$

其最优实施边界  $L_p = \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} K$ , 其中  $\gamma_2 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

将时刻 0 推广至时刻  $t$ , 则通过 (20) 和 (21) 式可得到式 (15). 同理可证, 当  $\Delta \leq 0$  时, (16) 式成立.

**定理 3** (支付连续红利的永久美式看涨期权的三角直觉模糊价格)

当  $\Delta > 0$  时,

$$V_{\tilde{c}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} \left( 1 - \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} c \right)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2}, \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} \left( 1 + \frac{\omega_{\tilde{S}} - \alpha}{\omega_{\tilde{S}}} c \right)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2} \right]. \quad (22)$$

当  $\Delta \leq 0$  时,

$$V_{\tilde{c}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} \left( 1 + \frac{u_{\tilde{S}} - \beta}{1 - u_{\tilde{S}}} c \right)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2}, \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} \left( 1 - \frac{u_{\tilde{S}} - \beta}{1 - u_{\tilde{S}}} c \right)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2} \right]. \quad (23)$$

其最佳实施边界为  $L_c = \frac{\gamma_2 K}{\gamma_2 - 1}$ , 其中  $\gamma_2 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

**证明** 利用引理 1 和定理 2 的推导结果易证.

**定理 4** (支付连续红利的永久美式看涨看跌期权的三角模糊价格)

当  $\Delta > 0$  时, 支付连续红利的永久美式看涨看跌期权的三角模糊价格分别为

$$V_{\tilde{c}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} (1 - (1 - \alpha)c)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2}, \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} (1 + (1 + \alpha)c)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2} \right], \quad (24)$$

$$V_{\tilde{p}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1+\gamma_1} (1 + (1 - \alpha)c)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1}, \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1+\gamma_1} (1 - (1 - \alpha)c)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1} \right]. \quad (25)$$

当  $\Delta \leq 0$  时, 支付连续红利的永久美式看涨看跌期权的三角模糊价格分别为

$$V_{\tilde{c}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} (1 - \beta c)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2}, \gamma_2^{-\gamma_2} \left( \frac{K}{\gamma_2 - 1} \right)^{1-\gamma_2} (1 + \beta c)^{\gamma_2} S_t^{\gamma_2} \right], \quad (26)$$

$$V_{\tilde{p}}(t, \tilde{S}_t) = \left[ \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1+\gamma_1} (1 + \beta c)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1}, \gamma_1^{\gamma_1} \left( \frac{K}{1 + \gamma_1} \right)^{1+\gamma_1} (1 - \beta c)^{-\gamma_1} S_t^{-\gamma_1} \right]. \quad (27)$$

支付连续红利的永久美式看涨看跌期权的最佳实施边界分别为  $L_c = \frac{\gamma_2 K}{\gamma_2 - 1}$ ,  $L_p = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} K$ . 其中  $\gamma_1 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\gamma_2 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ ,  $\nu = r - q - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

**证明** 由文献 [22, 24] 可知, 当  $\omega_{\tilde{s}} = 1$ ,  $u_{\tilde{s}} = 0$  时, 定理 2 和定理 3 的结果就退化为三角模糊价格.

由此看来, 三角直觉模糊数下的美式期权价格是三角模糊数下更一般的结果. 而当只考虑股票价格的随机性而忽略模糊性, 即  $\alpha = 1$  且  $\beta = 0$  时, 支付连续红利的永久美式看涨看跌期权价格由定理 4 的结果退化为式 (5) 和式 (4).

## 4 标的资产价格模拟

对于永久美式期权来说, 其价格主要由标的资产的股票价格决定, 所有影响标的资产股价的因素均会影响期权价格, 而时间对其定价没有影响. 又因为在现实生活中并不存在永久美式期权, 因此本文认为如果模型能很好的预测标的资产股票价格, 则可以间接得到比较准确的永久美式期权的区间价格.

本文采用沪深 300 指数 (该指数综合反映了股票市场整体情形) 自 2017 年 1 月 3 日到 2019 年 12 月 31 日的日收盘价格 (数据来源于同花顺数据库), 红利率  $q$  为 0.92%. 借鉴已有的文献, 选取一年期的国债收益率 1.39% 作为无风险利率  $r$ , 得到股票的三角直觉模糊价格, 如图 1 所示. 从图中可以看到, 真实的股指价格基本处在利用本文方法所得到的股指价格区间内, 而利用传统方法得到的模拟股价与真实股价之间的误差比较大, 进一步说明本文区间定价的科学性. 而因为传统模型中的均值、方差需估计, 因此模拟值与真实值之间存在偏差是正常现象.

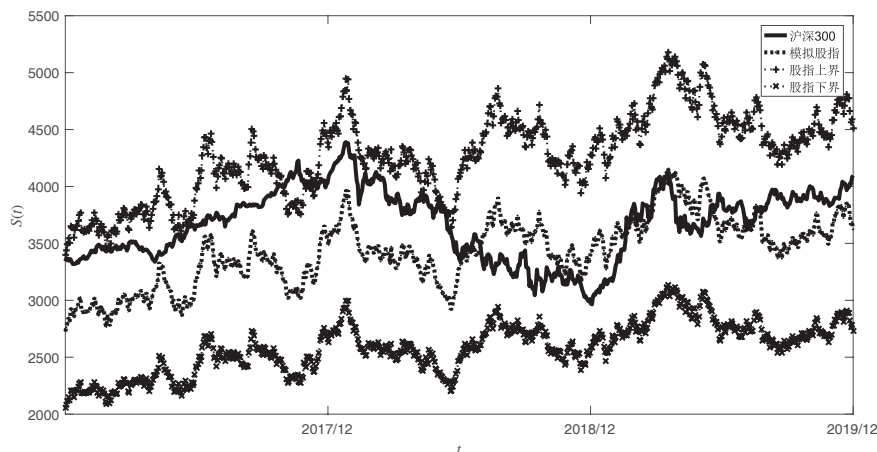


图 1 股指收盘价与模拟股指

## 5 比较静态分析

### 5.1 模型参数设定

在基准模型参数设定下 (见表 1), 投资者犹豫程度为 0.05, 永久美式看跌期权的三角直觉模糊价格区间是  $[3.7741, 3.7966]$ . 保持其他参数数值不变, 提高投资者犹豫程度时 (此时, 投资者犹豫程度为 0.15), 永久美式看跌期权的三角直觉模糊价格区间收缩为  $[3.7747, 3.7960]$ . 结果表明犹豫程度提高, 投资者行为更加谨慎.

### 5.2 比较静态分析结果

本文利用控制变量法来考察模型参数的敏感性, 分析模型的稳健性. 限于篇幅原因, 本文仅以支付连续红利的永久美式看跌期权为例进行分析.

图 2 反映了  $c$  对永久美式看跌期权价格的影响. 这里,  $P_1$  表示期权价格上界,  $P_2$  表示期权价格下界 (下同), 结果表明  $c$  对永久美式看跌期权价格的上下界影响方向不一致, 且随着  $c$  的增大, 期权的定价区间变大 (区间是指  $P_1 \sim P_2$ , 下同). 根据定义,  $c$  的大小反映了投资者心理承受能力的强弱,  $c$  越大, 投资者心理承受能力越强, 可接受的期权价格的范围也越大, 这与明雷和杨胜刚<sup>[22]</sup>, Yoshida<sup>[25]</sup> 等研究结果一致, 同时也符合本文的理论模型.

图 3 和图 4, 分别表示利率  $r$  与股价波动率  $\sigma$  对期权价格的影响. 从图 3 可以看出, 期权价格随着利率  $r$  的增大而下降, 并且期权价格的区间也随之增大. 考虑资金的时间价值, 对于期权购买方而言, 随着无风险利率的升高, 未来行权价格的现值越低, 因此期权价格与利率  $r$  呈负相关变动. 市场上由于利率  $r$  变动产生的悲观情绪与乐观情绪对价格的影响不对称, 因此  $P_1$  与  $P_2$  变化幅度不一致, 从而导致期权价格范围随  $r$  的增大而增大. 同时, 期权价格关于利率的图像是凸向原点的, 这意味着利率  $r$  的增长会使期权价格下降的速度减慢, 期权价格对于利率  $r$  变动的敏感度下降. 反观波动率对期权价格具有正向影响, 这与经济学直觉是一致的. 标的资产价格波动越大意味着未来标的资产价格上升或下降的不确定性越强, 对于永久美式看跌期



权的多头来说, 标的资产价格下降可以获利, 价格上升时的损失仅以期权费为限, 理论上来说价格下降的收益大于价格上升的损失. 因此以该资产为标的的衍生品的价格会上涨, 并且期权价格随波动率的增加首先加速增长, 而后降速增加, 但是这种规律不是特别明显.

图 5 和图 6 体现了股票价格  $S$  和执行价格  $K$  对期权价格的影响. 二者对于永久美式看跌期权价格的影响也表现出相反的结果. 股票价格上涨, 期权价格下跌, 执行价格  $K$  上升, 期权价格下降. 对于看跌期权而言, 随着标的资产价格上涨, 看跌期权的买方行权的可能性越小, 看跌期权的价值越小, 当标的资产价格上升到较高水平时, 期权价值趋近于 0. 同时, 期权价格关于标的资产价格凸向原点, 这表明期权价格随着标的资产价格的增加而减速下降, 标的资产价格对于期权价格的边际影响递减. 永久美式看跌期权的执行价格越高, 与股票真实价格越接近, 期权被执行的可能性越大, 看跌期权的价值也越大, 因此模型结果与经济学解释是一致的.

表 1 基准模型参数设定值

参数名称	符号及取值	参数名称	符号及取值
股票价格	$S = 8$	模糊指标	$c = 0.3$
期权执行价格	$K = 7$	$\alpha$ 截集	$\alpha = 0.6$
无风险利率	$r = 0.03$	$\beta$ 截集	$\beta = 0.3$
股价波动率	$\sigma = 0.5$	隶属度	$\omega_{\bar{s}} = 0.9$
红利率	$q = 0.01$	非隶属度	$u_{\bar{u}} = 0.05$

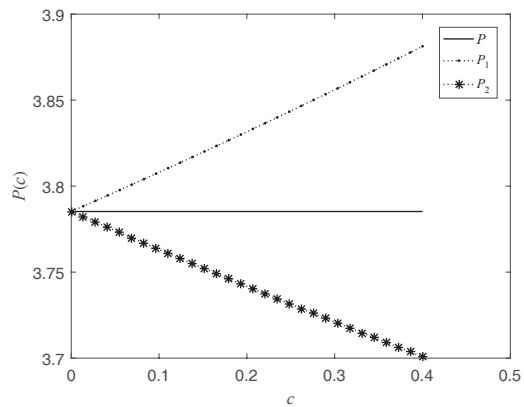


图 2  $c$  对期权价格的影响

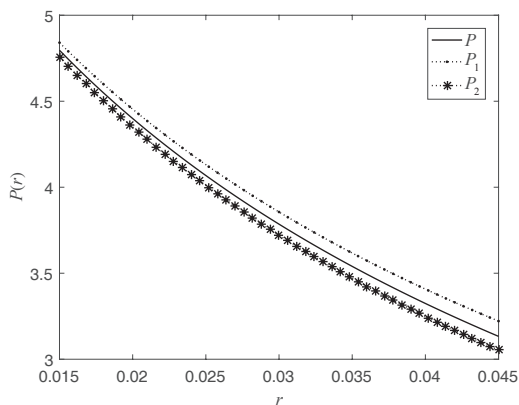


图 3  $r$  对期权价格的影响

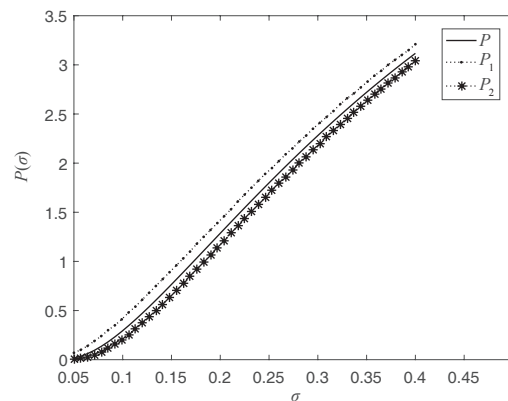


图 4  $\sigma$  对期权价格的影响

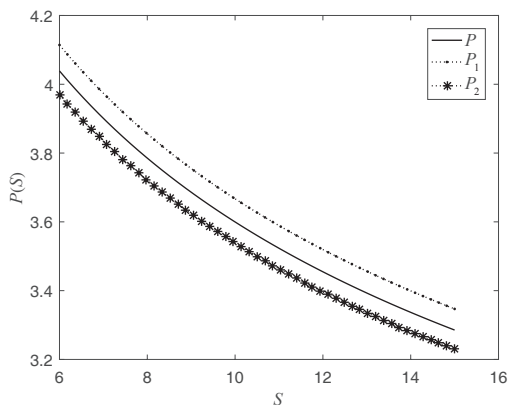


图 5  $S$  对期权价格的影响

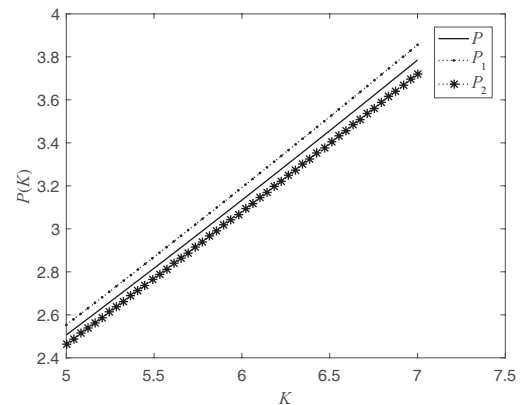


图 6  $K$  对期权价格的影响

## 6 结论

本文在以往只考虑永久美式期权随机性的研究上,综合考虑了投资者行为的状态依赖性和不确定性对永久美式期权定价的影响,研究了支付连续红利的永久美式期权定价的问题,给出了永久美式期权定价的解析解.考虑投资者的犹豫程度对期权价格的影响,引入三角直觉模糊数刻画了投资者犹豫的期权模糊价格,其结果更具经济学意义和实际意义.投资者可根据自身的心理承受能力及犹豫程度,来选择合理的参数,根据本文的模型来确定支付连续红利的永久美式期权的区间价格,以此指导投资者的投资决策.最后,本文对模型进行了数值计算和参数分析,并检验了模型的稳健性.通过本文的研究发现:反映投资者心理承受能力强弱的  $c$  越大,投资者心理承受能力越强,可接受的期权价格的范围也越大;期权价格随着利率  $r$  的增大而下降,并且期权价格的区间也随之增大;而波动率  $\sigma$  对期权价格具有正向影响;股票价格  $S$  和执行价格  $K$  对永久美式看跌期权价格的影响也表现出相反的结果,股票价格  $S$  上涨,期权价格下跌,执行价格  $K$  上升,期权价格下降.

## 参考文献

- [1] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141–183.
- [2] 王西梅, 赵延龙, 史若诗, 等. 基于局部波动率模型的上证 50ETF 期权定价研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(10): 2487–2501.  
Wang X M, Zhao X L, Shi R S, et al. Empirical analysis of Shanghai 50ETF options pricing based on local volatility model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(10): 2487–2501.
- [3] 张铁. 美式期权定价问题的数值方法 [J]. 应用数学学报, 2002, 25(1): 113–122.  
Zhang T. The numerical methods for American option pricing[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002, 25(1): 113–122.
- [4] Cen Z D, Chen W T. A HODIE finite difference scheme for pricing American options[J]. Advances in Difference Equations, 2019, 67: 1–17.
- [5] Kalantari R, Shahmorad S. A stable and convergent finite difference method for fractional Black-Scholes model of American put option pricing[J]. Computational Economics, 2019, 53(1): 191–205.
- [6] Zhang S M, Feng Y. American options pricing under the double Heston model based on asymptotic expansion[J]. Quantitative Finance, 2019, 19(2): 211–226.
- [7] Yang Z, Yi F H. A variational inequality arising from American installment call options pricing[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 357: 54–68.
- [8] Ballestra L V, Pacelli G. Pricing European and American options with two stochastic factors[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2013, 37: 1142–1167.
- [9] Liu G W, Hong L J. Revisit of stochastic mesh method for pricing American options[J]. Operations Research Letters, 2009, 37: 411–414.
- [10] Salmi S, Toivanen J. An iterative method for pricing American options under jump-diffusion models[J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61: 821–831.
- [11] Haghi M, Mollapourasl R, Vanmaele M. An RBF-FD method for pricing American options under jump-diffusion models[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 76(10): 2434–2459.
- [12] 邓国和. 双跳跃仿射扩散模型的美式看跌期权定价 [J]. 系统科学与数学, 2017, 37(7): 1646–1663.  
Deng G H. Valuation on American put option in an affine diffusion model with double jumps[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2017, 37(7): 1646–1663.
- [13] 姜礼尚, 罗俊. 跳扩散模型下永久美式看跌期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 10–18.  
Jiang L S, Luo J. Pricing perpetual options with jump diffusion[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(2): 10–18.
- [14] Gapeev P V, Rodosthenous N. Perpetual American options in diffusion-type models with running maxima and drawdowns[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2016, 126: 2038–2061.
- [15] 彭大衡, 王海燕. 一类带连续红利的永久美式期权的定价 [J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2009, 32(1): 3–6.  
Peng D H, Wang H Y. Pricing for a class of perpetual American options with continuous dividends[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2009, 32(1): 3–6.
- [16] 郭精军, 程志勇. 混合高斯模型下支付连续红利的永久美式期权定价 [J]. 应用数学, 2018, 31(2): 250–256.  
Guo J J, Cheng Z Y. Perpetual American pricing option in the mixed Gaussian model with dividend[J]. Mathematica Applicata, 2018, 31(2): 250–256.

- [17] 徐峰, 周圣武. 混合分数布朗运动下永久美式期权的定价 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(20): 61–65.  
Xu F, Zhou S W. Pricing perpetual American option in the mixed fractional Brownian motion[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2015, 45(20): 61–65.
- [18] Zhang Q, Guo X. Closed-form solutions for perpetual American put options with regime switching[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004, 64(6): 2034–2049.
- [19] 何维达, 梁智昊, 李茜. 基于推广的最优停时理论的永久美式期权定价 [J]. 系统工程, 2014, 32(9): 54–61.  
He W D, Liang Z H, Li Q. American option pricing under Levy motion[J]. Systems Engineering, 2014, 32(9): 54–61.
- [20] 董志勇, 韩旭. 模糊厌恶和羊群行为 [J]. 经济科学, 2008(2): 51–64.  
Dong Z Y, Han X. Ambiguity aversion and herd behavior[J]. Economic Science, 2008(2): 51–64.
- [21] Wu H C. Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31: 1069–1081.
- [22] 明雷, 杨胜刚. 基于投资者犹豫的欧式期权定价模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(6): 1392–1398.  
Ming L, Yang S G. Pricing European options based on the hesitation degree of investors[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(6): 1392–1398.
- [23] 韩立岩, 泮敏. 基于奈特不确定性随机波动率期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(6): 1175–1184.  
Han L Y, Pan M. Knightian uncertainty based option pricing with stochastic volatility[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(6): 1175–1184.
- [24] 张茂军, 秦学智, 南江霞. 基于三角直觉模糊数的欧式期权二叉树定价模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(1): 34–40.  
Zhang M J, Qin X Z, Nan J X. Binomial tree model of the European option based on triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(1): 34–40.
- [25] Yoshida Y. A discrete-time model of American put option in an uncertain environment[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 151: 153–166.
- [26] Yoshida Y, Yasuda M, Nakagami J, et al. A new evaluation of mean value for fuzzy numbers and its application to American put option under uncertainty[J]. Fuzzy Sets and System, 2006, 157: 2614–2626.
- [27] Zhang H M, Watada J. Fuzzy Levy-GJR-GARCH American option pricing model based on an infinite pure jump process[J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2018, D(7): 1843–1859.
- [28] 龚日朝, 马霖源. 基于区间直觉模糊数的得分函数与精确函数及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 463–475.  
Gong R C, Ma L Y. A new score function and accuracy function of interval-valued intuitionistic fuzzy number and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(2): 463–475.
- [29] 张圣平, 熊德华, 张峥, 等. 现代经典金融学的困境与行为金融学的崛起 [J]. 金融研究, 2003, 274(4): 44–56.  
Zhang S P, Xiong D H, Zhang Z, et al. The dilemma of modern classical finance and the development of behavior finance[J]. Journal of Financial Research, 2003, 274(4): 44–56.
- [30] 王贞洁, 王京. 宏观经济不确定性、战略变化幅度与投资行为 [J]. 管理评论, 2018, 30(7): 207–217.  
Wang Z J, Wang J. Macroeconomic uncertainty, the scope of strategic change and investment behavior[J]. Management Review, 2018, 30(7): 207–217.
- [31] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.  
Jiang L S. Mathematical model and method of option pricing[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.